数理解析研究所講究録
第2071巻 2018年 1-16

The hidden symmetry of chiral fields and the Riemann-Hilbert problems, revisited

筑波大学数理物質系
井ノ口順一
Jun-ichi Inoguchi
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

概要

We generalize the Ueno-Nakamura theory and Uhlenbeck-Segal theory for harmonic maps of Riemann surfaces into compact semi-simple Lie groups to those of (affine) harmonic maps into general Lie groups equipped with torsion free bi-invariant connection in terms of loop groups.

はじめに

$z=x+yi$ を座標にもつ複素平面 $\mathbb{C}$ で定義されユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ に値をもつ C^∞ 級行列値函数 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathrm{U}(n)$ が

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$$

をみたすとき φ を**主カイラル場**（principal chiral field）とよぶ（F. Gürsey [16]）．

1980 年代に上野・中村はリーマン・ヒルベルト問題を利用した主カイラル場の解の変換理論に関する研究を行った [30, 32]（自己双対接続に関する研究 [31, 33] も参照）．主カイラル場の解の変換に関する初期の研究には K. Dolan [12], M. Jacques, Y. Saint-Aubin [22], V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, A. B. Shabat [36, 37] がある．

その後 K. Uhlenbeck は主カイラル場に対し extended solution, ユニトン（uniton）の概念を導入した．さらに Riemann 球面で定義された主カイラル場に対する Bäcklund 変換（ユニトン変換）を定式化した [34]. G. Segal は extended solution が Grassmann 模型（Grassmannian model）への正則曲線であることを示した [26]. Uhlenbeck と Segal の研究を契機に Riemann 球面で定義された主カイラル場（調和球面）の研究が英国の微分幾何学者（F. E. Burstall, M. Guest, J. Rawnsley, John C. Wood）によって進められた [8, 9, 35, 8]. また Guest は M. J. Bergvelt と主カイラル場の変換である“ドレッシング”をループ群作用の観点から研究している [5].

定義域が輪環面（torus）の場合の主カイラル場の研究が進展するのはしばらく後のことである．

これは 1980 年代の無限可積分系の研究とは独立な研究動機に基づく．「丸くない数学的しゃぼん玉（平均曲率一定閉曲面）は存在するか」という微分幾何学の問題（Hopf 予想とよばれる）の解答として H. Wente が平均曲率一定輪環面の存在を証明した（歴史的経緯については拙著 [21] 参照）．Wente の研究を契機に定義域が輪環面である主カイラル場の研究が始まり Burstall, D. Ferus, F. Pedit, U. Pinkall による構成理論 [7] が得られた．さらに J. F. Dorfmeiter, Pedit, H. Wu はコンパクト・リーマン対称空間への調和写像に対する（非線型）変数分離法を確立し初期値問題の解法を与えた [11]．この解法は DPW-method とよばれている．

上野・中村および Uhlenbeck-Segal の理論を再検討し，コンパクト半単純の仮定をはずし一般化することを考察したい．本稿で紹介する成果は Dorfmeister 氏（ミュンヘン工科大学），小林真平氏（北海道大学）との共同研究 [10] に基づく．

1 調和写像

1.1 調和写像の方程式

主カイラル場の方程式を微分幾何の観点から再考する．

定義 1.1 (Eells-Sampson) (M,g), (N,h) を Riemann 多様体, $\varphi : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．φ が**エネルギー汎函数**（energy functional）

$$E(\varphi) = \int \frac{1}{2}|\mathrm{d}\varphi|^2\,\mathrm{d}v_g$$

の停留点であるとき φ を**調和写像**（harmonic map）という．

$\dim M = 1$ なら調和写像は N 内の測地線である．また $\dim N = 1$ のときは M 上の調和函数である．また φ が等長はめ込み（φ による M の像 $\varphi(M)$ が N の部分多様体）のとき φ が調和写像であるとは $\varphi(M)$ が N の**極小**部分多様体（minimal submanifold）であることを注意しておく．

M の局所座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ と N の局所座標系 $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ を使って Riemann 計量を

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \quad h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j$$

と表示する．M, N の Christoffel 記号を ${}^M\Gamma_{ij}^k$, ${}^N\Gamma_{ij}^k$ とする．たとえば N のものは

$${}^N\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} h^{k\ell}\left\{\frac{\partial h_{j\ell}}{\partial y^i} + \frac{\partial h_{i\ell}}{\partial y^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial y^\ell}\right\}.$$

(M,g) の Laplace-Beltrami **作用素** Δ_g は

$$\Delta_g = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{m} {}^M\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$$

で定義される. $\varphi: M \to N$ を局所座標系を使って

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n), \quad \varphi^i := y^i \circ \varphi$$

と表すと調和写像の方程式（エネルギーの Euler-Lagrange 方程式）は

$$\Delta_g \varphi^k + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} g^{\alpha\beta}\, {}^N\Gamma_{ij}^k(\varphi) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\beta} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

と表示される. 調和写像方程式は非線型 2 階楕円型偏微分方程式系で, 一般には無限可積分系であることとは全く期待できない. 調和写像の一般論については [13] を参照.

1.2 定義域が 1 次元の場合

$\dim M = 1$ のとき（測地線）は (N, h) の接ベクトル束 TN 上の Hamilton 系になっている（常微分方程式）. Hamiltonian は運動エネルギーである. 有限自由度 Hamilton 系として完全積分可能なとき, 可積分測地流とよばれる.

なんらかの意味で**可積分な調和写像**というものが定式化できればそれは「有限自由度完全積分可能 Hamilton 系」の**高次元化**になる.

1.3 定義域が 2 次元の場合

$\dim M = 2$ のとき, エネルギーは M の共形変換 (等角変換) で不変である. したがって調和性は定義域 (M, g) を 2 次元 Riemann 多様体から Riemann 面, すなわち 2 次元多様体 M に Riemann 計量 g の共形同値類（共形類）

$$\mathcal{C} = [g] = \{\mu\, g \mid \mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)\}$$

を指定されたものに変えても意味をもつ.

註 1.1 この不変性は Yang-Mills 汎函数が 4 次元のときは, 共形変換（等角変換）で不変であることの類似である. そもそも, この類似性でゲージ理論のトイモデルとして導入された.

定義 1.2 Riemann 面 $(M, \mathcal{C})$ で定義され Riemann 多様体 (N, h) に値をもつ C^∞ 級写像 φ に対し $\varphi^* h = h(\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\varphi)$ が M の共形類 $\mathcal{C}$ に含まれるとき φ は**共形的**であるという.

共形的調和写像は N 内の極小曲面を定める.

Riemann 面 $(M, \mathcal{C})$ から Riemann 多様体 (N, h) への C^∞ 級写像 φ に対する調和写像方程式は次のように複素座標 z で書き換えられる.

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial z \partial \bar{z}} + \sum_{i,j=1}^{n} {}^N\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \frac{\partial \varphi^j}{\partial \bar{z}} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

この方程式を改めて観察する．この偏微分方程式は，定義域に共形構造 $\mathcal{C}$，行き先 (target manifold) には線型接続 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ さえあれば定義できることに気づく（ただし変分原理は失う）．また定義域を $1+1$ 次元 Lorentz 時空の共形同値類（Riemann 面の類似，Lorentz 面）としてもよい．本稿ではカイラル場の定義域を 2 次元 Riemann 多様体（あるいはリーマン面）としているが，それらは正確には Euclid カイラル場とよばれるものであり単にカイラル場というと定義域が $1+1$ 次元 Lorentz 時空（あるいは Lorentz 面）がものを意味する．

註 1.2 Riemann 面または Lorentz 面で定義され，コンパクト Riemann 対称空間，たとえば球面，射影空間，Grassmann 多様体などに値をもつ調和写像は数理物理学で非線型シグマ模型 (nonlinear sigma model) とよばれてきた [38]．Uhlenbeck は Lorentz 面で定義された Riemann 多様体への調和写像を wave map と呼んでいる．

ところでカイラル場において行き先の空間 (target space) の Riemann 計量はどうやって定まっているのだろうか．コンパクト半単純 Lie 群は Killing 計量とよばれる標準的な Riemann 計量（両側不変計量）を備えている．実際，コンパクト半単純 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$$

は負定値であるから B を負定数倍したものを $\mathfrak{g}$ の内積として採用すれば，G に両側不変 Riemann 計量が定まる．この Riemann 計量を **Killing 計量**とよぶ．通常はこの Killing 計量を与え G を Riemann 対称空間 $G \times G/G$ と考えている．

2 カイラル場の方程式（再考）

$G = (G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ をコンパクト半単純 Lie 群に両側不変リーマン計量（Killing 計量）を指定したものとする．また $\mathfrak{g}$ で G の Lie 環を表す．また $\mathcal{D} \subset M$ をリーマン面 M の**単連結**な座標近傍とする．C^∞ 級写像 $\varphi : M \to G$ に対し，

$$U := \varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad V := \varphi^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}}$$

とおく．U, V は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値をもつことに注意．組 $\{U,V\}$ は **Maurer-Cartan 方程式** (積分可能条件)：

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + [U,V] = 0$$

をみたす．

逆に Maurer-Cartan 方程式をみたす $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 値函数の組 $\{U,V\}$ を与えると $\varphi^{-1}\varphi_z = U$, $\varphi^{-1}\varphi_{\bar{z}} = V$ をみたす $\varphi : \mathcal{D} \to G$ が存在する．

一方，φ の両側不変計量に関する調和写像の方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\varphi^{-1}\varphi_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^{-1}\varphi_{\bar{z}}\right)=0.$$

U(n) に対する主カイラル場の方程式として知られているものはこの偏微分方程式である.

したがって G に値をもつ調和写像を与えるには $\{U,V\}$ に関する連立偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}+[U,V]=0,\quad \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

を解かねばならない.

ここで Pohlmeyer による重要な発見を説明する [24]. $\lambda\in\mathbb{S}^1$ を $\{U,V\}$ に次のように挿入する:

$$U^\lambda:=\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})U,\quad V^\lambda:=\frac{1}{2}(1-\lambda)V.$$

λ を**スペクトル径数**とよぶ.

定理 2.1 (Pohlmeyer による零曲率表示, 1980) φ が調和であるための条件は, すべての λ に対し積分可能条件

$$\frac{\partial V^\lambda}{\partial z}-\frac{\partial U^\lambda}{\partial \bar{z}}+[U^\lambda,V^\lambda]=0$$

をみたすことである.

積分可能条件をみたす $\{U^\lambda,V^\lambda\}$ が与えられれば

$$F^{-1}\frac{\partial F}{\partial z}=U^\lambda,\quad F^{-1}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=V^\lambda,\quad F(0)=e$$

をみたす $F=F^\lambda:\mathcal{D}\times\mathbb{S}^1\to G$ が存在する.

$$U^\lambda=\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})U,\quad V^\lambda=\frac{1}{2}(1-\lambda)V$$

であるから

$$F^{\lambda=1}=e,\quad \varphi:=F^{\lambda=-1}\text{は調和}$$

となる. $\lambda\neq\pm1$ について F^λ は調和ではないが Wess-Zumino 項付調和写像というものになっている（[19, 29]）. さらに F は

$$F:D\to\Omega G=\{\gamma:\mathbb{S}^1\to G\mid C^\infty,\ \gamma(1)=e\}$$

という写像とみなせる. ΩG は G の based loop group とよばれる. Uhlenbeck は F を主カイラル場方程式の **extended solution** とよんだ.

Pressley, Segal, Wilson は ΩG が無限次元グラスマン多様体と同一視できることを示した [25, 27]. ループ群 $\Lambda G=\{\mathbb{S}^1\to G\mid C^\infty\}$ の等質空間 $\mathrm{Gr}:=\Lambda G/G\cong\Omega G$ は無限次元グラスマン多様体と同一視される. さらに Segal [26] は extended solution は ΩG の正則曲線（holomorphic curve）であることを示した（無限次元のツイスター空間）. コンパクト Lie 群への調和写像については Guest の本 [15] が詳しい.

3 一般化の候補

Uhlenbeck-Segal の理論においては G が「コンパクト半単純」という条件は本質的である．G がコンパクト半単純でない場合，（一般には）両側不変リーマン計量が存在しない．

G のコンパクト半単純性を緩和する動機がいくつかある．

- 微分幾何学的動機: 3 次元幾何学（Thurston geometry）[28] における極小曲面．
- 確率論への応用の期待（可解リー群）．調和写像は Riemann 多様体上のマルティンゲールを Brown 運動に写すことが知られている．
- 上野・中村理論および Uhlenbeck-Segal 理論の成功の鍵を探るという動機．

ここでまず Riemann 計量の「両側不変性」が本質的である理由を説明する．G を一般の Lie 群として左不変な Riemann 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を与える．その計量の共変微分（Levi-Civita 接続）を ∇ とする．ここで $X, Y \in \mathfrak{g}$ の**反交換子** $\{X,Y\}$ を

$$\langle\{X,Y\},Z\rangle = \langle X,[Z,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle$$

で定める．Riemann 計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が両側不変であるための必要十分条件はすべての $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し $\{X,Y\}=0$ をみたすことである．

C^∞ 級写像 $\varphi : \mathcal{D} \to (G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対する調和写像の方程式は

$$V_z + U_{\bar{z}} + \{U,V\} = 0.$$

したがって G への調和写像が零曲率表示をみたすためには $\{U,V\}=0$ をみたしていなければならない．G がコンパクト半単純でない場合，この条件をみたす調和写像を求めることは困難である．したがって一般の Lie 群に Uhlenbeck-Segal 理論を一般化することは期待できない．

註 3.1 (自己双対ゲージ場との類似性) Riemann 面 M で定義され左不変 Riemann 計量を備えた線型 Lie 群 G に値をもつ C^∞ 級写像 $\varphi : M \to G$ に関する調和写像方程式と自己双対ゲージ場との類似性を注意しておこう．まず直積束 $P = M \times G$ を考える．$\mathfrak{g}$ を標準ファイバーとする P の同伴ベクトル束を $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ で表す（adjoint bundle）． P 上の接続（ゲージポテンシャル）d_A を $\mathrm{d}_A := \mathrm{d} + \alpha/2$ で与える（$\alpha = \varphi^{-1}\mathrm{d}\varphi$）． 次に $\Psi := \alpha/2$ を M 上の $\mathfrak{g}_P$ 値 1 次微分形式とみなそう．Ψ を **Higgs 場**とよぶ．φ の G の左不変 Riemann 計量に関する調和写像方程式は組 (A,Ψ) に関する偏微分方程式系

$$F_A + \frac{1}{2}[\Psi \wedge \Psi] = 0,$$
$$\mathrm{d}_A\Psi = 0, \quad \mathrm{d}_A * \Psi + \{\Psi \wedge *\Psi\} = 0$$

に書き換えられる．ここで F_A は d_A の曲率形式（ゲージ場の field strength）を表す．すなわち $F_A = \mathrm{d}A + [A \wedge A]/2$. また $*$ は Hodge のスター作用素である．

G の左不変計量が両側不変のとき, この調和写像方程式は

$$F_A + \frac{1}{2}[\Psi \wedge \Psi] = 0, \quad \mathrm{d}_A \Psi = \mathrm{d}_A * \Psi = 0$$

となる. この方程式系は Hitchin により導入され輪環面 $\mathbb{T}^2$ から 3 次元球面 $\mathbb{S}^3 = \mathrm{SU}(2)$ への調和写像の研究で使われた [18]. この方程式系を次のように変更しよう

$$F_A - \frac{1}{2}[\Psi \wedge \Psi] = 0, \quad \mathrm{d}_A \Psi = \mathrm{d}_A * \Psi = 0.$$

これは Riemann 面上の自己双対ゲージ場の方程式である [1, 17].

4 紆余曲折／試行錯誤

調和写像（主カイラル場）の方程式を再考する. もう一度、調和写像の方程式を眺めてみる.

$$\Delta_g \varphi^k + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} g^{\alpha\beta}\, {}^N\Gamma_{ij}^k(\varphi) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\beta} = 0.$$

この方程式は定義域 M に擬リーマン計量 g, 行き先 N には線型接続（共変微分）$\{{}^N\Gamma_{ij}^k\}$ さえあれば定義できる. とくに $\dim M = 2$ ならば M に共形構造が与えられていればよい.

この点に着目して上野-中村, Uhlenbeck-Segal の理論を検討すると次の疑問が沸く.

> 主カイラル場の無限可積分系としての構造を詳細に記述しているが, 可積分構造は両側不変計量を必要としているのか.

換言すると N の計量を捨てて（つまりカイラル場の変分原理を捨ててしまって）可積分系の構造だけを抽出できないだろうかという疑問である. この疑問が本研究の動機である.

Lie 群 G に「左不変 Riemann 計量」の代わりに左不変な線型接続（共変微分 ∇）だけを与えて調和写像方程式を考察する.

Lie 群上の左不変線型接続は以下のように与えることができる [23].

定理 4.1 (野水, 1954) G 上の左不変接続全体は $\mathfrak{g}$ 値の双線型写像全体と 1 対 1 対応する.

この対応はリー環上で $\nabla^\mu_X Y = \mu(X, Y)$ と定めることで得られる.

左不変擬 Riemann 計量を G に与えたときその計量の Levi-Civita 接続はもちろん左不変であり $\mu(X, Y) = ([X, Y] + \{X, Y\})/2$ に対応する.

定理 4.2 Riemann 面 M から Lie 群 G への C^∞ 級写像 $\varphi : M \to G$ が ∇^μ に関して調和写像であるための条件は $U_{\bar{z}} + V_z + 2(\mathrm{sym}\,\mu)(U, V) = 0$.

ここで $\mathrm{sym}\,\mu$ は μ の対称部分を表す.

∇^μ は一般には捩率をもつが, 「捩率を持たない」と仮定してよい. 実際, ∇^μ の捩率を T^μ とし ${}^\dagger\nabla^\mu_X Y = \nabla^\mu_X Y - \frac{1}{2}T^\mu(X, Y)$ と定めると ${}^\dagger\nabla^\mu$ は捩率 $= 0$ の接続であり次が言える.

定理 4.3 φ が ∇^μ-調和 $\Longleftrightarrow$ ${}^\dagger\nabla^\mu$-調和.

両側不変な線型接続は次のようにして与えることができる.

命題 4.1 ∇^μ が両側不変 $\Longleftrightarrow$ μ は Ad 不変.

ここで特徴的な 3 種の両側不変線型接続を紹介する.

- 標準接続（canonical connection）$m = 0$ の定める接続.
- 反標準接続（anti canonical connection）$\mu(X,Y) = [X,Y]$ の定める接続.
- 中立接続（neutral connection）$\mu(X,Y) = [X,Y]/2$ の定める接続.

これらは Cartan-Schouten の (-)-connection, (+)-connection, (0)-connection ともよばれる. これらを統一的に扱うため

$${}^{(t)}\mu(X,Y) = \frac{1}{2}(1+t)[X,Y], \quad t \in \mathbb{R}$$

と定め ${}^{(t)}\mu$ の定める接続を ${}^{(t)}\nabla$ とする. ${}^{(t)}\nabla$ の中で捩率 $= 0$ であるのは中立接続 ${}^{(0)}\nabla$ のみである.

標準接続について次がわかる.

定理 4.4 $\varphi : M \to G$ が ${}^{(-1)}\nabla$-調和 $\Rightarrow$ どんな左不変計量についても調和になる (equi-harmonic).

この結果からすると標準接続に関する調和写像を構成できれば片側不変 Riemann 計量をもつ Lie 群への調和写像が直ちに得られる. ところが ${}^{(-1)}\nabla$-調和は強すぎるのである.

定理 4.5 ${}^{(-1)}\nabla$ 調和写像は

$$\varphi(z,\bar{z}) = \exp\left(2\mathrm{Re}\int \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

というものに限る. ただし $[\Phi, \overline{\Phi}] = 0$.

発想をかえて零曲率表示がつねにみたされるような左不変接続を探してみる. すなわち

$$(\mathrm{sym}\,\mu)(U,V) = 0$$

がつねに ∇^μ-調和写像に対し成立するような接続である. この観点から次の事実が示される.

定理 4.6 (Dorfmeister-I-Kobayashi) どんな ∇^μ 調和写像も零曲率表示をみたすならば μ は交代的である.

μ が交代的なとき, φ が ∇^μ 調和であることと $\nabla^{(0)}$ 調和であることは同値.

ここで次の事実にも注意しよう.

定理 4.7 G の左不変計量が両側不変 $\Longleftrightarrow$ Levi-Civita 接続は $\nabla^{(0)}$ と一致.

- とくに G がコンパクト半単純なら $\nabla^{(0)}$ 調和とは, もともとの調和（カイラル場）である.
- したがって上野-中村, Uhlenbeck-Segal 理論におけるカイラル場の可積分構造は $\nabla^{(0)}$ 調和写像のもつ構造であることがわかった.
- $\nabla^{(0)}$ 調和写像の方程式は

$$F_A + \frac{1}{2}[\Psi \wedge \Psi] = 0, \quad \mathrm{d}_A \Psi = \mathrm{d}_A * \Psi = 0$$

と書き換えられることに注意.

以上のことから $\nabla^{(0)}$ 調和写像は「コンパクト・リー群への調和写像」を含む可積分系のクラスであると言える. とくに半単純でないリー群に値をもつ $\nabla^{(0)}$ 調和写像は新しい可積分系を提供することが期待される.

5 初期値問題の解法

前節までの観察により Riemann 面 M から中立接続を備えた Lie 群 $(G, {}^{(0)}\nabla)$ への調和写像を研究対象とすることが適切であることがわかった. この節では調和写像の初期値問題の解法を与える.

5.1

Lie 群 G に中立接続を指定するとは（微分幾何学的には）どういうことだろうか. G をアフィン対称空間 $G \times G/G$ と捉えることに他ならない. 実際 $G \times G/G$ の（対称空間の意味での）標準接続が ${}^{(0)}\nabla$ である. $\mathcal{G} = G \times G$ とおき $\mathcal{G}$ の G への作用を

$$(a, b) \cdot g = agb^{-1}$$

で定める. 単位元 e における等方部分群（isotropy subgroup）は

$$\triangle = \{(a, a) \mid a \in G\} \cong G$$

である. $(e, e) \in \mathcal{G}$ における $\mathcal{G}$ の接空間は $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. 一方 $(e, e) \in \mathcal{G}$ における $\triangle$ の接空間は

$$\mathfrak{d} = \{(Y, Y) \mid Y \in \mathfrak{g}\} \cong \mathfrak{g}.$$

e における $\mathcal{G}/\triangle$ の接空間は

$$\mathfrak{p} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

と同一視され, 分解 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{p}$ が得られる. このアフィン対称空間に同伴する対合 σ は

$$\sigma(a, b) = (b, a)$$

で与えられる.

5.2

$G = \mathcal{G}/\triangle$ への調和写像方程式を考察する．ここでの基本戦略は G をアフィン対称空間 $\mathcal{G}/\triangle$ と捉えることと Dorfmeister-Pedit-Wu による DPW-method [11] をアフィン対称空間に拡張して $\mathcal{G}/\triangle$ に適用することである．DPW-method のアフィン対称空間への拡張は [4] でも扱われている．

単連結領域 $\mathcal{D} \subset M$ 上で定義された C^∞ 級写像 $\mathcal{F} = (e, \varphi) : D \to G \times G$ を φ の **frame** とよぶ．$\mathcal{U} := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_z$, $\mathcal{V} := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_{\bar{z}}$ とおくと

$$\mathcal{U} = (0, U), \quad \mathcal{V} = (0, V), \quad U = \varphi^{-1}\varphi_z, \quad V = \varphi^{-1}\varphi_{\bar{z}}$$

である．Pohlmeyer の方式に従って U と V にスペクトル径数 $\lambda \in \mathbb{S}^1$ を挿入する．

$$U^\lambda = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-1})U, \quad V^\lambda = \frac{1}{2}(1 - \lambda)V.$$

さらに $\mathcal{U}^\lambda$, $\mathcal{V}^\lambda$ を

$$\mathcal{U}^\lambda := \left(U^\lambda, U^{-\lambda}\right), \quad \mathcal{V}^\lambda := \left(V^\lambda, V^{-\lambda}\right)$$

で定めると $\mathcal{U}^{\lambda=1} = \mathcal{U}$ かつ $\mathcal{V}^{\lambda=1} = \mathcal{V}$ である．

定理 5.1 $\varphi : \mathcal{D} \to (G, {}^{(0)}\nabla)$ に対し次は互いに同値である．

- すべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対し $\{\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{V}^\lambda\}$ が積分可能条件 $\mathcal{V}^\lambda_z - \mathcal{U}^\lambda_{\bar{z}} + [\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{V}^\lambda] = 0$ をみたす．
- すべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対し $\{U^\lambda, V^\lambda\}$ が積分可能条件 $V^\lambda_z - U^\lambda_{\bar{z}} + [U^\lambda, V^\lambda] = 0$ をみたす．
- φ は ${}^{(0)}\nabla$ 調和.

連立偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}^\lambda = \mathcal{F}^\lambda\,\mathcal{U}^\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathcal{F}^\lambda = \mathcal{F}^\lambda\,\mathcal{V}^\lambda$$

の解 $\mathcal{F}^\lambda = (F^\lambda, F^{-\lambda})$ を **extended frame** という．各 λ に対し $\varphi^\lambda := F^{-\lambda}(F^\lambda)^{-1}$ は ${}^{(0)}\nabla$ 調和である．とくに $\varphi^1 = \varphi$ である．F^λ は φ の extended solution である．

5.3

ここでループ群に関するいくつかの結果を引用する． 簡単のため G を線型リー群とする．$\Lambda G^{\mathbb{C}}$ で G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ への C^∞ 級ループ全体のなすループ群を表す（$\Lambda G^{\mathbb{C}}$ には適当な完備化を施し Banach-Lie 群の構造を与える．この議論は煩雑なので割愛する）．

$$\begin{aligned}
\Lambda G &= \{\gamma \in \Lambda G^{\mathbb{C}} \mid \gamma(\lambda) \in G\}, \\
\Lambda^+ G^{\mathbb{C}} &= \{\gamma \in \Lambda G^{\mathbb{C}} \mid \gamma, \gamma^{-1} \text{ は単位円板 } \mathbb{D} \text{ に正則拡張できる }\}, \\
\Lambda^- G^{\mathbb{C}} &= \{\gamma \in \Lambda G^{\mathbb{C}} \mid \gamma, \gamma^{-1} \text{ は} \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \text{ に正則拡張できる }\}, \\
\Lambda^-_* G^{\mathbb{C}} &= \{\gamma \in \Lambda^- G^{\mathbb{C}} \mid \gamma(\lambda = \infty) = e\}.
\end{aligned}$$

ここで G を $G = H \ltimes B$ と分解する（Levi 分解）．H は簡約部分群, B は可解部分群．このとき $G^{\mathbb{C}}$ のループ群に対する Birkhoff 分解定理が次で与えられる（ただし詳細は複雑なので説明は割愛する．[3, 10] を参照されたい）．

定理 5.2 (Birkhoff 分解定理) $\Lambda G^{\mathbb{C}} = \bigcup_{s \in \Lambda^d H^{\mathbb{C}}} (\Lambda^- G^{\mathbb{C}})^-_s \cdot s(\Lambda^-_* G^{\mathbb{C}})^+_s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.

この分解定理より次を得る．

系 5.1 $\mathrm{Br}_{G^{\mathbb{C}}} = \Lambda^-_* G^{\mathbb{C}} \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ は $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ の稠密開集合である（Birkhoff big cell）．演算写像

$$\Lambda^-_* G^{\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} \to \Lambda^-_* G^{\mathbb{C}} \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} \subset \Lambda G^{\mathbb{C}}$$

は Birkhoff big cell への複素解析的微分同相写像．したがって $\mathrm{Br}_{G^{\mathbb{C}}}$ の各元 g は

$$g = g_- \cdot g_+, \quad g_- \in \Lambda^-_* G^{\mathbb{C}}, \quad g_+ \in \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$$

と一意的に分解される．

$\mathcal{G} = G \times G$ のループ群の分解定理を与えよう．$\Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \Lambda G^{\mathbb{C}} \times \Lambda G^{\mathbb{C}}$ のリー部分群

$$\Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma = \{(g(\lambda), g(-\lambda)) \mid g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}\}, \quad \Lambda \mathcal{G}_\sigma = \{(g(\lambda), g(-\lambda)) \mid g \in \Lambda G\}$$

に対し次が言える．

定理 5.3 (Birkhoff 分解) $\mathrm{Br}_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}} = \Lambda^-_* \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma \cdot \Lambda^+ \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma$ は $\Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma$ の稠密開集合（Birkhoff big cell）．演算写像

$$\Lambda^-_* \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma \times \Lambda^+ \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma \to \Lambda^-_* \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma \cdot \Lambda^+ \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma \subset \Lambda \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma$$

は Birkhoff big cell への複素解析的微分同相写像．したがって $\mathrm{Br}_{\mathcal{G}^{\mathbb{C}}}$ の各元 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \cdot \mathcal{F}_+, \quad \mathcal{F}_- \in \Lambda^-_* \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma, \quad \mathcal{F}_+ \in \Lambda^+ \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\sigma$$

と一意的に分解される．

定理 5.4 (Riemann-Hilbert 分解) $\mathrm{Iw}^e_{\mathcal{G}} := \Lambda \mathcal{G}_\sigma \cdot \Lambda^+ \mathcal{G}_\sigma$ は $\Lambda \mathcal{G}_\sigma$ の開集合（Iwasawa big cell）．$\mathrm{Iw}^e_{\mathcal{G}}$ の各元 $\mathcal{R}$ は

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}\,\mathcal{L}, \quad \mathcal{R} \in \Lambda \mathcal{G}_\sigma, \ \mathcal{L} \in \Lambda^+ \mathcal{G}_\sigma$$

と一意的に分解される．この分解を **Riemann-Hilbert 分解**または**岩澤分解**という．

定理 5.5 (Dorfmeister-I-Kobayashi（順問題）) $\varphi : D \to G$ を neutral harmonic map とする．extended frame $\mathcal{F}_\lambda$ を $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_- \mathcal{V}_+$ と Birkhoff 分解すると $\mathcal{F}_-$ は $\bar{z}$ に依存しない．さらに $\mathcal{N} = \mathcal{F}_-^{-1} \mathrm{d}\mathcal{F}_- = (\lambda^{-1}\xi(z), -\lambda^{-1}\xi(z))$ と表示でき ξ は有理型である．

$\mathcal{N}$ のことを**ポテンシャル**（potential）という．

定理 5.6 (Dorfmeister-I-Kobayashi（逆問題）) ポテンシャル $\mathcal{N}$ をひとつ与える.

(1) ODE $\mathrm{d}\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_-\mathcal{N}$ を解く.

(2) $\mathcal{R}_-$ を $\mathcal{R}_- = \mathcal{F}\mathcal{W}_+$ と Riemann-Hilbert 分解する.

$$\mathcal{F} = (F_\lambda, F_{-\lambda}),\ \mathcal{W}_+ = (W_+(z,\bar{z},\lambda), W_+(z,\bar{z},-\lambda)).$$

(3) すると $\mathcal{F}$ は extended frame.

(4) $\nabla^{(0)}$ 調和写像の extended frame はすべてこの方法で得られる.

(5) G をコンパクト半単純とすれば上野-中村, Uhlenbeck-Segal の理論が再現される.

6 可解群の例

コンパクト半単純でない Lie 群への $\nabla^{(0)}$ 調和写像の例を挙げよう. この節では 3 次元可解 (solvable) リー群の 2 径数族

$$G(\mu_1,\mu_2) = \left\{ (x^1,x^2,x^3) = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 x^3} & 0 & x^1 \\ 0 & e^{\mu_2 x^3} & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$$

を行き先の空間として選ぶ. この Lie 群には標準的な左不変リーマン計量

$$\mathrm{d}s^2 = e^{-2\mu_1 x^3}(\mathrm{d}x^1)^2 + e^{-2\mu_2 x^3}(\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$$

がある. $\{(G(\mu_1,\mu_2), \mathrm{d}s^2)\}$ は Thurston 幾何における 3 種類のモデル空間を含む. 実際 $(G(0,0), \mathrm{d}s^2)$ は Euclid 空間 $\mathbb{E}^3$ であり, $c \neq 0$ に対し $(G(c,c), \mathrm{d}s^2)$ は定曲率 $-c^2$ の双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2)$. $(G(1,-1), \mathrm{d}s^2)$ は可解幾何のモデル空間 Sol_3 である.

（計量は忘れて）$\varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) : \mathbb{C} \to (G(\mu_1,\mu_2), {}^{(0)}\nabla)$ に対する調和写像の方程式は

$$\varphi^k_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}\mu_k(\varphi^k_z\varphi^3_{\bar{z}} + \varphi^k_{\bar{z}}\varphi^3_z) = 0,\ (k=1,2),\quad \varphi^3_{z\bar{z}} = 0$$

である. ポテンシャル $\mathcal{N}_- = (\lambda^{-1}\xi(z), -\lambda^{-1}\xi(z))$ は

$$\xi(z) = \lambda^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1\xi^3(z) & 0 & \xi^1(z) \\ 0 & \mu_2\xi^3(z) & \xi^2(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}z$$

で与えられる. ここで有理型函数 $\xi^1(z)$, $\xi^2(z)$, $\xi^3(z)$ は

$$\begin{aligned}\xi^1(z) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\mu_1\varphi^3(z,0)}\varphi^1_z(z,0)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mu_1\varphi^3_z(z,0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu_1\varphi^3(z,0)}\partial_{\bar z}\varphi^1(z,0)}{z-w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar w,\\ \xi^2(z) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\mu_2\varphi^3(z,0)}\varphi^2_z(z,0)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mu_2\varphi^3_z(z,0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu_2\varphi^3(z,0)}\partial_{\bar z}\varphi^2(z,0)}{z-w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar w,\\ \xi^3(z) &= -\frac{1}{2}\varphi^3_z(z,0).\end{aligned}$$

このポテンシャルは Hörmander の inhomogeneous Cauchy-Riemann equation から得られる. 実際

$$v^3_{+0}(z,\bar z) := \frac{1}{2}\varphi^3(z,\bar z).$$

は inhomogeneous Cauchy-Riemann equation [20]

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi^3}\varphi^k_{\bar z} + (v^k_{+0})_{\bar z} = 0,\quad (k=1,2)$$

の解である.

$$v^k_{+0}(z,\bar z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu_1\varphi^3(z,\bar z)}\partial_{\bar z}\varphi^k(z,\bar z)}{z-w}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar w,\quad (k=1,2).$$

任意の ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像 $\varphi=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3):\mathbb{D}\to G(\mu_1,\mu_2)$ は次のように具体的に書ける:

$$\begin{aligned}\varphi^1(z,\bar z) &= \exp\left(-2\mu_1\mathrm{Re}\int_{z_*}^{z}\xi^3(t)\,dt\right)\left(\tilde f^1(z,\bar z,-1)-\tilde f^1(z,\bar z,1)\right),\\ \varphi^2(z,\bar z) &= \exp\left(-2\mu_2\mathrm{Re}\int_{z_*}^{z}\xi^3(t)\,dt\right)\left(\tilde f^2(z,\bar z,-1)-\tilde f^2(z,\bar z,1)\right),\\ \varphi^3(z,\bar z) &= -4\mathrm{Re}\int_{z_*}^{z}\xi^3(t)\,dt.\end{aligned}$$

$\tilde f^k(z,\bar z,l)$, $(k=1,2)$ は Riemann-Hilbert 分解 $g^k=\tilde f^k+g^k_+$,

$$\begin{aligned}g^k(z,\bar z,l) =&\lambda^{-1}\exp\left(-2\mu_k\mathrm{Re}\,(\lambda^{-1}\int_{z_*}^{z}\xi^3(t)\,\mathrm{d}t)\right)\\ &\times\int_{z_*}^{z}\xi^k(t)\exp\left(\lambda^{-1}\mu_k\int_{z_*}^{t}\xi^3(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

から得られる. とくに $\mu_1=\mu_2=0$ なら古典的によく知られた調和函数の表示式

$$\varphi^k(z,\bar z) = -4\,\mathrm{Re}\int_{z_*}^{z}\xi^k(t)\,\mathrm{d}t,\quad (k=1,2,3)$$

である.

E_{pq} で行列単位を表す. $\varphi(x,y)=\exp(xE_{11})\cdot\exp(yE_{22})$ は $\nabla^{(0)}$ 調和である. 左不変計量 $\mathrm{d}s^2$ に関し φ は平坦曲面で平均曲率が一定値 $(\mu_1+\mu_2)/2$. この曲面の性質を述べよう.

(1) $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ のときユークリッド空間内の平面.

(2) $\mu_1 = \mu_2 = c \neq 0$ のとき, 双曲空間内のホロ球（境球）.

(3) $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$ のとき, 全測地的でない極小曲面.

双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内のホロ球は Poincaré 計量に関し調和でないが中立接続について調和である. 双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の曲面の微分幾何学においてホロ球をモデルとする２つのクラス

- 平均曲率 H が $H^2 = 1$ をみたす曲面
- ガウス曲率 K が 0 の（特異点付）曲面

は明示的な積分表示公式をもち多くの研究がある [6, 14]. $\mathbb{H}^3$ 内の $\nabla^{(0)}$ 調和曲面はホロ球を例にもち明示的な積分表示をもつ第三のクラスを与える. $\nabla^{(0)}$ 調和曲面の微分幾何学的研究は今後の課題である.

註 6.1 3 次元 Heisenberg 群への ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像が Balan と Dorfmeister により扱われている [2].

7 まとめと今後の課題

- 上野・中村による「Riemann-Hilbert 問題による解法理論」と Uhlenbeck-Segal によるグラスマン模型を使った「無限次元ツイスター理論」の成功の鍵は, 群のコンパクト性でなく接続にあった.
- この点に着目し, 全く一般のリー群に対するループ群の Riemann-Hilbert 分解定理を作った.
- Riemann-Hilbert 分解を用いて, 上野・中村理論と Uhlenbeck-Segal 理論を統合した理論ができた.
- この構成法は新種の可積分系を提供する. おもしろい系を探したい. 確率論などへの応用も期待したい.

講演の機会をくださった津田先生に感謝いたします. また有用なコメントをいただいた木村弘信先生にも御礼申し上げます.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615.

[2] V. Balan, J. Dorfmeister, A Weierstrass-type representation for harmonic maps from Riemann surfaces to general Lie groups, Balkan J. Geom. Appl. **5** (2000), no. 1, 7–37.

[3] V. Balan, J. Dorfmeister, Birkhoff decompositions and Iwasawa decompositions for loop groups, *Tôhoku Math. J.* (2), **53** (2001), no. 4, 593–615.

[4] V. Balan, J. Dorfmeister, Generalized Weierstrass type representation for harmonic maps into general symmetric spaces via loop groups, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), no. 1, 69–94.

[5] M. J. Bergvelt, M. A. Guest, Actions of loop groups on harmonic maps. Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), no. 2, 861–886.

[6] R. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[7] F. E. Burstall, D. Ferus, F. Pedit, U. Pinkall, Harmonic tori in symmetric spaces and commuting Hamiltonian systems on loop algebras, Ann. Math. (2) **138** (1993), no. 1, 173–212.

[8] F. E. Burstall, M. A. Guest, Harmonic two-spheres in compact symmetric spaces, revisited. Math. Ann. **309** (1997), no. 4, 541–572.

[9] F. E. Burstall, D. Ranwnsley, *Twistor theory for Riemannian symmetric spaces*, Lecture Notes in Math. **1424**, Springer Verlag, 1990.

[10] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups, Adv. Math. **298** (2016), 207–253.

[11] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 633–668.

[12] L. Dolan, Kac-Moody algebra is hidden symmetry of chiral models. Phys. Rev. Lett. **47** (1981), no. 19, 1371–1374.

[13] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, Regional Conference Series in Math. **50** (1983), Amer. Math. Soc.

[14] J. A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, Flat surfaces in the hyperbolic 3-space, Math. Ann. **316** (2000), no. 3, 419–435.

[15] M. A. Guest, *Harmonic Maps, Loop Groups, and Integrable Systems*, London Math. Soc. Student Texts 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[16] F. Gürsey, On the symmetries of strong and weak interactions, Il Nuovo Cimento **16** (1960), no. 2, 230–240.

[17] N. J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 59–126.

[18] N. J. Hitchin, Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 3, 627–710.

[19] N. J. Hitchin, The Wess-Zumino term for a harmonic map, J. Reine Angew. Math. **543** (2002), 83–101.

[20] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, (3rd edition), North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[21] 井ノ口順一, 曲面と可積分系, 現代基礎数学 **18**, 朝倉書店, 2015.

[22] M. Jacques, Y. Saint-Aubin, Infinite-dimensional Lie algebras acting on the solution space of various σ models, J. Math. Phys. **28** (1987), no. 10, 2463–2479.

[23] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math. **76** (1954), no. 1, 33–65.

[24] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian systems and interactions through constraints, Commun. Math. Phys. **46** (1976), no. 3, 207–221.

[25] A. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[26] G. B. Segal, Loop groups and harmonic maps, in: *Advances in Homotopy Theory* (S. M. Salamon, B. F. Steer, W. A. Sutherland eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series **139**, 1991, pp. 153–167.

[27] G. Segal, G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Pub. I.H.E.S. **61** (1985), 5–65.

[28] W. M. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1 (S. Levy ed.), Princeton Math. Series, vol. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.

[29] A. V. Tyrin, Harmonic spheres in compact Lie groups, and extremals of a multivalued Novikov functional, Russian Math. Surveys **46** (1991), no. 3, 233–234.

[30] K. Ueno, Infinite-dimensional Lie algebras acting on chiral fields and the Riemann-Hilbert problem, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), no. 1, 59–82.

[31] K. Ueno, Y. Nakamura, Transformation theory for anti-self-dual equations and the Riemann-Hilbert problem, Phys. Lett. B109 (1982), no. 4, 273–278.

[32] K. Ueno, Y. Nakamura, The hidden symmetry of chiral fields and the Riemann-Hilbert problem, Phys. Lett. B117(1982), no. 34, 208–212.

[33] K. Ueno, Y. Nakamura, Transformation theory for anti-self-dual equations. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), no. 2, 519–547.

[34] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model), J. Differ. Geom. **30** (1989), no. 1, 1–50.

[35] J. C. Wood, Explicit construction and parametrization of harmonic two-spheres in the unitary group, Proc. Lond. Math. Soc. **59** (1989), no. 3, 608–624.

[36] V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov, Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method, Sov. Phys. JETP **47** (1978), no. 6, 1017–1027.

[37] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II, Funct. Anal. Appl. 13 (1979), no. 3, 166–174.

[38] W. J. Zakrzewski, *Low-dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1989.